1. (多選題)下列各敘述何者正確？__________

(A)若 a,b 是有理數，則 $a+b$, ab 均為有理數。

(B)若 a 是有理數，b 是無理數，則 $a+b$, ab 均為無理數。

(C)若 a,b 是無理數，則 $a+b$, ab 均為無理數。

(D)若 a,b 為實數且 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，則 $a=c$ 且 $c=d$。

(E)若 a,b 為有理數，且 $a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=0$ 且 $b=0$。

〈解〉：

(A) ∵有理數的運算具有封閉性

∴ $a+b$, ab 均為有理數 ∴正確

(B) 令 $a=0$, $b=\sqrt{2}$ ⇒ $a+b=\sqrt{2}$, $a\cdot b=0$ ∴錯誤

(C) 令 $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$ ⇒ $a+b=0$, $ab=2$ ∴錯誤

(D) 令 $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}$, $c=3$, $d=1$ ∴錯誤

(E) ∵ $a,b\in Q$ ⇒ $a+b\sqrt{2}=0+0\sqrt{2}$

∴ $a=0$ 且 $b=0$ ∴正確

∴本题為 (A)(E)

2. 若 a,b 為有理數且 $\dfrac{2+3\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$，則數對 $(a,b)=$__________ 。

<解>： 原式 $\Rightarrow a+b\sqrt{2}=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$$=\frac{(2+3\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=2\sqrt{2}+2+6+3\sqrt{2}$$

$$=8+5\sqrt{2}$$

$\therefore (a,b)=(8,5)$

3. 設 $\sqrt{41-6\sqrt{20}}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $a-\dfrac{4}{b}=$ ＿＿＿＿＿＿

〈解〉：$\sqrt{41-6\sqrt{20}}=\sqrt{41-2\sqrt{180}}=\sqrt{(\sqrt{36}-\sqrt{5})^2}$

$$=\sqrt{36}-\sqrt{5}=6-\sqrt{5}\doteqdot 3.\cdots$$

∴ 整數部份 $a=3$

小數部份 $b=(6-\sqrt{5})-3=3-\sqrt{5}$

$$\therefore\ a-\frac{4}{b}=3-\frac{4}{3-\sqrt{5}}=3-\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

$$=3-(3+\sqrt{5})$$

$$=-\sqrt{5}$$

4. 若 a 為1~9的正整數且 $\frac{17}{90}<0.1\overline{a3}<\frac{1}{5}$，則 $a=$ ______。

〈解〉 $\because 0.1\overline{a3}=\frac{1a3-1}{990}=\frac{1a2}{990}$

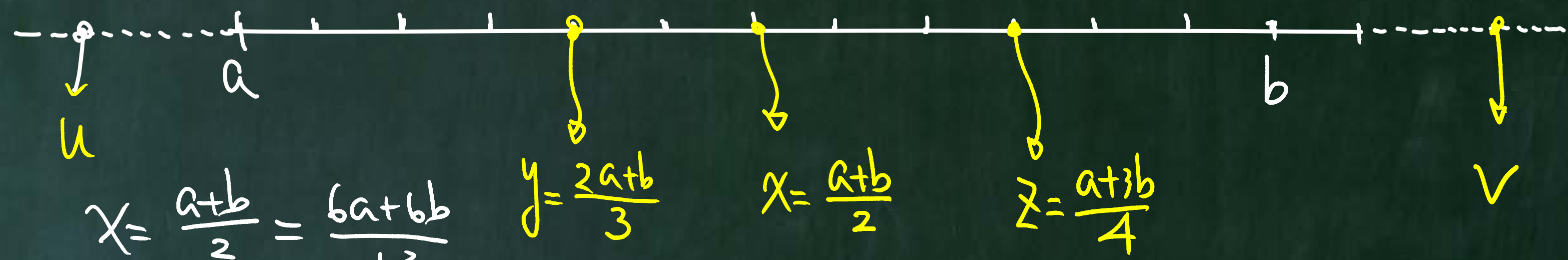
又 $\frac{17}{90}=\frac{187}{990}$, $\frac{1}{5}=\frac{198}{990}$

$\therefore \frac{187}{990}<\frac{1a2}{990}<\frac{198}{990}$

$\therefore \underline{a=9}$ #

5. 已知a,b為有理數，且$a<b$，令$x=\dfrac{a+b}{2}$，$y=\dfrac{2a+b}{3}$，$z=\dfrac{a+3b}{4}$，$u=\dfrac{4a-b}{3}$，$v=\dfrac{5b-a}{4}$，

試比較x,y,z,u,v五數的大小：________________。



$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{6a+6b}{12}$$

$$y=\frac{2a+b}{3}=\frac{8a+4b}{12}$$

$$z=\frac{a+3b}{4}=\frac{3a+9b}{12}$$

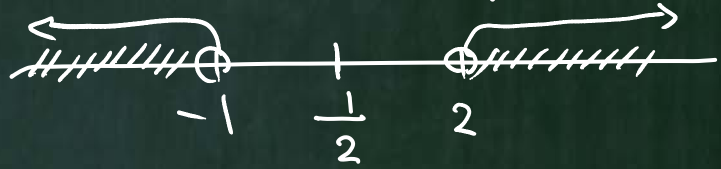
$$\left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{4a-b}{3}=\dfrac{16a-4b}{12} \\ V=\dfrac{5b-a}{4}=\dfrac{15b-3a}{12} \end{array}\right.$$

∴由圖可得知

$u<y<x<z<V$

6. a,b為實數，若不等式$|ax+1|>b$之解為$x>2$ 或$x<-1$，則數對$(a,b)=$ ________ 。

〈解〉： ∵ $x>2$ 或 $x<-1$



$\Rightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|>\frac{3}{2}$

$\Rightarrow |2x-1|>3$

$\Rightarrow |-2x+1|>3$

∴數對 $(a,b)=(-2,3)$

7. 已知 $x>0$，則 $\sqrt{2x}+\dfrac{1}{\sqrt{18x}}$ 的最小值為 ＿＿＿＿＿＿ 。

<解>

$\because \sqrt{18x}=3\sqrt{2}\sqrt{x}$

$\therefore$ 由算幾不等式：

$$\frac{\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{18x}}}{2}\geq\sqrt{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{3\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{\sqrt{x}}}}$$

$$\therefore \sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{18x}}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore$ 最小值為 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

8. 已知 $-1 \leq x \leq 2$ 且 $2 \leq y \leq 3$，求得 $a \leq xy-3x+y+5 \leq b$，則 $a+b=$＿＿＿＿＿＿＿。

〈解〉：

$$\because \ xy-3x+y+5$$
$$= x(y-3)+(y-3)+8$$
$$= (y-3)(x+1)+8$$

$$\because \ -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 3$$
$$2 \leq y \leq 3 \Rightarrow -1 \leq y-3 \leq 0$$

$$\therefore \ -3 \leq (x+1)(y-3) \leq 0$$
$$\Rightarrow 5 \leq (x+1)(y-3)+8 \leq 8$$
$$\Rightarrow 5 \leq xy-3x+y+5 \leq 8$$
$$\therefore \ a=5,\ b=8 \Rightarrow a+b=13$$

9. 某次數學小考成績不理想，老師決定用一個線型函數來調整分數。已知原始分數 18 分、48 分經調整後變為 40 分及 90 分。今小潔調整後的分數是 60 分，則她的原始分數是多少分?__________ 。

〈解〉: 令此線型函數為 $f(x)=ax+b$

由題意 $f(18)=40$, $f(48)=90$

令 $f(t)=60$

$\therefore\ a=\dfrac{f(48)-f(18)}{48-18}=\dfrac{f(t)-f(18)}{t-18}$

$\therefore\ \dfrac{90-40}{30}=\dfrac{60-40}{t-18}$

$\therefore\ 3\times 20=5(t-18)$

$\therefore\ 60=5t-90 \Rightarrow 5t=150$

$\therefore\ t=30$

$\therefore$ 原始分數為 30 分

10. 若 $f(x)=\frac{8}{3}x-1999$，則 $\frac{f(2013)-f(2011)}{2013-2011}$ 之值為____________。

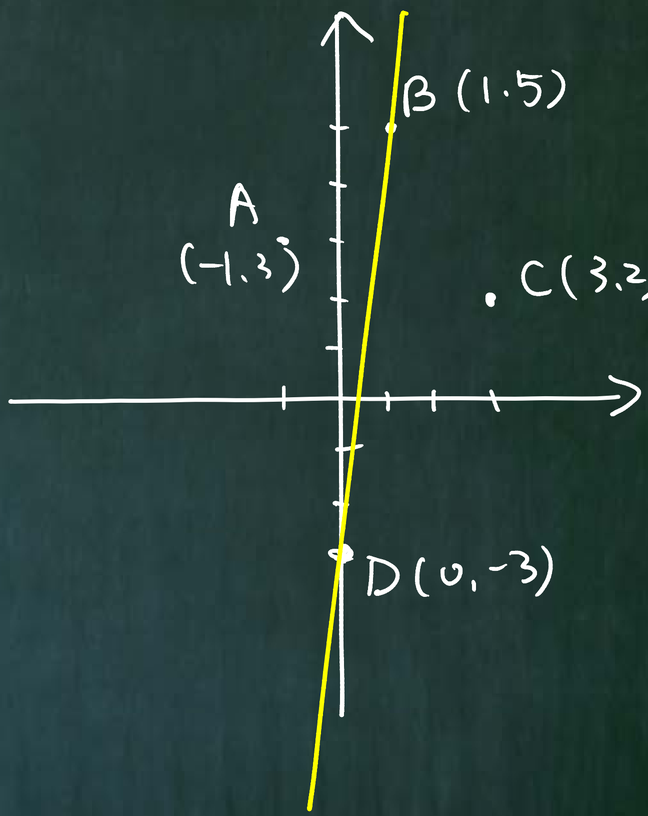
〈解〉：$\frac{f(2013)-f(2011)}{2013-2011}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=m$

故所求即為直線的斜率

∴所求為 $\frac{8}{3}$

11. 小愚有一張藏寶圖，圖上標有 A(−1, 3)，B(1, 5)，C(3, 2)，D(0, −3)四點，連接這四點可得六條線段 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$。圖上有一線索：『寶藏藏在斜率最大的線段上』。聰明的你可知道寶藏藏在哪一條線段上？＿＿＿＿＿＿ 。

<解>:



由圖可得知

斜率最大為 $\overline{BD}$

$(\because m_{BD}>0$ 且坡度最大$)$

12. 大智說：「不論 k 為哪一個實數，直線 $(3k-1)x+(k+2)y+4-5k=0$, 恆過一定點」，如果大智的敘述是真的，則此定點坐標為何？__________ 。

〈解〉：原式可重新整理：

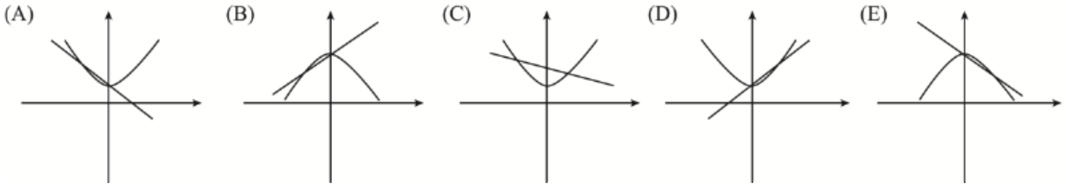
$$3kx-x+ky+2y+4-5k=0$$

$$\Rightarrow k(3x+y-5)-(x-2y-4)=0$$

表恆過 $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ x-2y-4=0 \end{cases}$ 交点的直線系

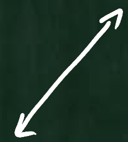
故此定点坐標為 $(2,-1)$

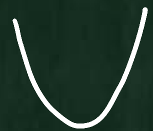
13. (多選題)下列各圖中，哪些可能是直線 $y=ax+b$ 與拋物線 $y=ax^2+b$ 的圖形？＿＿＿＿＿＿。



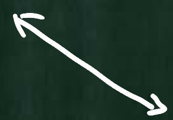
〈解〉

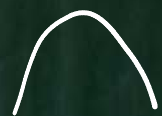
(1) 若 $a>0$

$y=ax+b$ 的圖形為 

$y=ax^2+b$ 的圖形為 

(2) 若 $a<0$

$y=ax+b$ 的圖形為 

$y=ax^2+b$ 的圖形為 

∴由上述圖形可得知正確圖形為(D)(E)

14. 設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式，其中 $g(x)\neq 0$，已知 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 x^2-2x+3，餘式為 $4x^3-5x^2+9x-2$，則 $f(x)$ 除以 x^2-2x+3 的餘式為____________。

〈解〉：

由除法關係式可得：

$$f(x)=g(x)\cdot(x^2-2x+3)+(4x^3-5x^2+9x-2)$$

$$=(x^2-2x+3)\cdot g(x)+\left[(x^2-2x+3)\cdot(4x+3)+(3x-11)\right]$$

$$\therefore f(x)=\underbrace{(x^2-2x+3)}_{\text{除式}}\underbrace{\left[g(x)+(4x+3)\right]}_{\text{商式}}+\underbrace{3x-11}_{r}$$

故所求餘式為 $3x-11$

$$\begin{array}{rrrr|r}
4 & -5 & +9 & -2 & \\
 & 8 & +6 & & 2 \\
 & & -12 & -9 & -3 \\
\hline
4 & +3 & +3 & -11 &
\end{array}$$

15. 設 k 為非零實數，若對任何實數 x，$kx^2-(3+k)x+4\geq 0$ 恆成立，求 k 的範圍?____________ 。

〈解〉：$\because kx^2-(3+k)x+4\geq 0$

① $k>0$

② $D=(3+k)^2-4\cdot k\cdot 4\leq 0$

$\therefore 9+6k+k^2-16k\leq 0$

$\Rightarrow k^2-10k+9\leq 0$

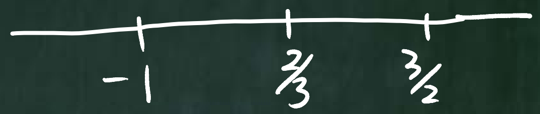
$\Rightarrow (k-1)(k-9)\leq 0$

$\Rightarrow 1\leq k\leq 9$

由①、②取交集可得 $1\leq k\leq 9$

16. 設 x 為實數，求 $|3x-2|+|2x-3|\leq|x+1|$ 之解的範圍為 ______。

〈解〉：



1° 當 $x\geq\frac{3}{2}$ 時 $\Rightarrow (3x-2)+(2x-3)\leq x+1$

$\Rightarrow 4x\leq 6 \quad \therefore x\leq\frac{3}{2}$

又 $\because x\geq\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ 取交集後可得 $x=\frac{3}{2}$

2° 當 $\frac{2}{3}\leq x<\frac{3}{2}$ 時 $\Rightarrow (3x-2)+(3-2x)\leq x+1$

$\Rightarrow 0x+1\leq 1 \quad \therefore \frac{2}{3}\leq x<\frac{3}{2}$

3° 當 $-1\leq x<\frac{2}{3}$ 時 $\Rightarrow (2-3x)+(3-2x)\leq x+1$

$\Rightarrow 6x\geq 4 \quad \therefore x\geq\frac{2}{3}$

又 $\because -1\leq x<\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ 取交集後無解

4° 當 $x<-1$ 時 $\Rightarrow (2-3x)+(3-2x)\leq -x-1$

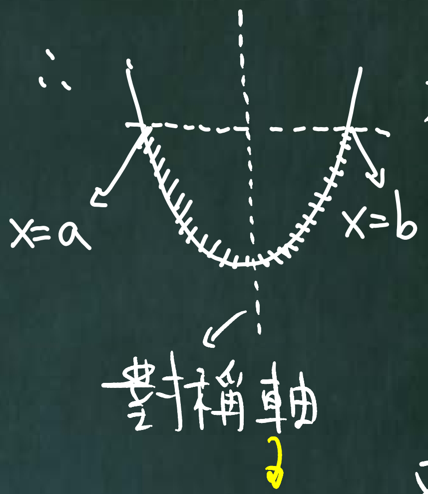
$\Rightarrow 4x\geq 6 \quad \therefore x\geq\frac{3}{2}$

又 $\because x<-1$ 故無解 $\Rightarrow$ 由 1°~4° 可得 $\frac{2}{3}\leq x\leq\frac{3}{2}$

17. 已知 $f(x)=x^2-4x+3$，若 $f(x)$ 在 $a\le x\le b$ 中有 2 個 x 值，能使 $f(x)$ 得到最大值，則 $a+b=$_______ 。

〈解〉： ∵ $f(x)$ 圖形為開口朝上的拋物線

∴



又∵由題意：

在 $a\le x\le b$ 中有 2 個 x 值能使 $f(x)$ 得到最大值

∴ 對稱軸方程式為 $x=\frac{a+b}{2}$

$f(x)=x^2-4x+3$

$=(x-2)^2-1$

又∵頂點的 x 坐標為 $x=2$

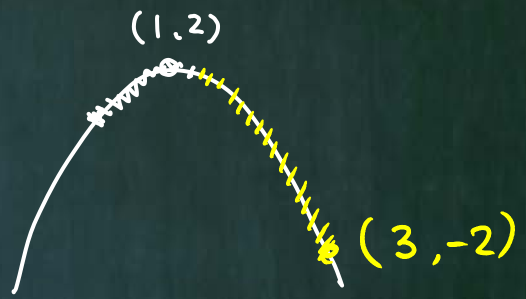
∴ $\frac{a+b}{2}=2 \Rightarrow a+b=4$ ※

18　已知 $f(x)=|x^2-3x|-x+1$，且 $0\le x\le 3$，當 $x=a$ 時，$f(x)$ 有最大值 b，則數對 $(a,b)=$______。

〈解〉：$\because x^2-3x=x(x-3)$

$\therefore$ 當 $0\le x\le 3$ 時 $\Rightarrow x^2-3x\le 0$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=(3x-x^2)-x+1\\&=-x^2+2x+1\\&=-(x^2-2x+1)+1+1\\&=-(x-1)^2+2\end{aligned}$$



$\therefore$ 當 $x=1$ 時，$f(x)$ 有最大值 2

$\therefore a=1,\ b=2$

$\therefore (a,b)=(1,2)$

二、計算題(10 分)

1. 已知 $f(x)=8x^3-28x^2+28x-3=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$

（1）求 $a,b,c,d=?$ （6 分）

（2）求 $f(0.499)$ 的近似值，四捨五入至小數點後第三位。（4 分）

〈解〉：

〈1〉由連續綜合除法：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8 & -28 & +28 & -3 & \\
 & +4 & -12 & +8 & \frac{1}{2} \\
\hline
8 & -24 & +16 & +5 & \\
 & +4 & -10 & & \frac{1}{2} \\
\hline
8 & -20 & +6 & & \\
 & +4 & & & \frac{1}{2} \\
\hline
8 & -16 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 8\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^3-16\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+6\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+5 \\
&= \frac{8}{8}(2x-1)^3-\frac{16}{4}(2x-1)^2+\frac{6}{2}(2x-1)+5 \\
&= (2x-1)^3-4(2x-1)^2+3(2x-1)+5
\end{aligned}
$$

$\therefore a=1,\ b=-4,\ c=3,\ d=5$

〈2〉 $f(0.499)=(-0.002)^3-4(-0.002)^2+3(-0.002)+5$

$\fallingdotseq 5-0.006=4.994$